CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE DES INGENIEURS DE LA VILLE DE PARIS

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 heures - coefficient : 2

Le sujet comporte 2 pages.

N.B : -Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé, et d'indiquer clairement les numéros de ces questions.

-Les résultats devront être soulignés ou encadrés.

-Il sera tenu le plus grand compte dans la notation de la rigueur des raisonnements, de la précision de la rédaction et de la qualité de la présentation matérielle.

Dans tout le problème, l'espace affine euclidien orienté E est rapporté à un repère affine orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note P le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On utilisera pour les figures demandées une unité de longueur d'environ 4 cm. $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels.

On se place dans P dans les parties I, II et III, et dans E dans la partie IV.

Un point M de ce plan P peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x et y, ou par ses coordonnées polaires θ et ρ (angle polaire et rayon polaire).

Etant donné dans P un arc (γ) birégulier et un point M de (γ), on note :

s l'abscisse curviligne de M sur (γ),

$\vec{T}$ le vecteur tangent à (γ) en M,

φ l'angle $(\vec{i}, \vec{T})$,

$\vec{N}$ le vecteur unitaire vérifiant $(\vec{T}, \vec{N}) = \pi/2$,

R le rayon de courbure algébrique de (γ) en M,

I le centre de courbure de (γ) en M,

$\vec{u}_\theta$ le vecteur défini par : $\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$,

V l'angle $(\vec{u}_\theta, \vec{T})$.

On pourra utiliser sans démonstration les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{MI} = R\vec{N} \quad , \quad R = \frac{ds}{d\varphi} \quad , \quad \tan(V) = \frac{\rho d\theta}{d\rho} \ .$$

Partie I

On considère la courbe (C) définie par la représentation paramétrique :

$$\mathbb{R} \rightarrow P$$
$$t \rightarrow Q_t \ / \ \overrightarrow{OQ_t} = 2\cos^2(t)\vec{i} + \sin(2t)\vec{j}$$

1°) Préciser la nature de la courbe (C), en donner une équation polaire, tracer (C).

2°) A tout réel t, on associe le point M_t de P, projection orthogonale de O sur la tangente à (C) en Q_t. Quand t décrit $\mathbb{R}$, le point M_t décrit une courbe fermée notée (Γ).

a) Déterminer les coordonnées de M_t en fonction de t.

b) En déduire une équation polaire de (Γ). Donner une relation reliant θ et t, θ étant l'angle polaire du point M_t.

c) Déduire de cette équation polaire une autre construction géométrique de (Γ) à partir de l'image (C') de (C) par l'homothétie de centre O et de rapport 1/2.

d) Etudier (Γ). Tracer (Γ) et (C') sur une même figure.

3°) a) Calculer la longueur L de la courbe (Γ).

b) Calculer l'aire A du domaine plan D délimité par (Γ).

c) Calculer le volume W du domaine de l'espace engendré par la rotation de D autour de son axe de symétrie.

Partie II

On choisit dans cette partie de paramétrer l'arc (Γ) par θ, angle polaire.

A tout point M_θ de la courbe (Γ),distinct du pôle O, on associe le centre de courbure I_θ de (Γ) en M_θ , et la projection orthogonale H_θ de I_θ sur la droite (OM_θ).

1°) Déterminer l'ensemble (δ) des points I_θ .

2°) Montrer qu'il existe une homothétie, dont on donnera le centre Ω et le rapport r, qui transforme la courbe (Γ) en la courbe (δ).

3°) Montrer qu'il existe un réel k, que l'on déterminera, vérifiant la relation :

$\overrightarrow{OH_\theta} = k\,\overrightarrow{OM_\theta}$, pour tout θ réel tel que $M_\theta \neq O$.

4°) En déduire l'ensemble (ε) des points H_θ .

5°) Représenter sur une même figure les courbes (Γ), (δ), (ε), ainsi qu'un point M_θ, et les points I_θ et H_θ qui lui sont associés.

Partie III

Soit λ un réel fixé non nul et différent de 1.

Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble G_λ des arcs biréguliers (γ) du plan tels qu'en tout point M de (γ) distinct de O on ait la relation $\overrightarrow{OH} = \lambda\,\overrightarrow{OM}$, où H désigne la projection orthogonale du centre de courbure I en M à (γ) sur la droite (OM).

1°) Par quelles transformations géométriques du plan l'ensemble G_λ cherché reste-t-il invariant ? On demande de donner deux types de transformations.

2°) Pour (γ) appartenant à G_λ, déterminer une équation différentielle (E_1) reliant θ et V, et une équation différentielle (E_2) reliant ρ et V.

3°) Intégrer les équations différentielles (E_1) et (E_2). En déduire une équation polaire d'un arc (γ) de G_λ.

4°)Donner l'équation polaire d'une courbe (γ_o) de G_λ engendrant tout G_λ par les transformations trouvées en 1°).

5°)Tracer (γ_o) pour $\lambda = 1/3$.

Partie IV

On se place dans E. Soit ω le point de coordonnées (1/2, 0, 0). On note (S) la sphère de centre ω et de rayon 3/2, (Σ) le cylindre de section droite (Γ), et (h) la courbe intersection des deux surfaces (S) et (Σ).

Montrer que les tangentes à (h) font avec l'axe des z un angle α constant que l'on déterminera.

FIN DE L'ENONCE